Soluție

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Deoarece $\alpha^3 = e$ rezultă că $\alpha^{2009} = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația devine $\alpha^2 \cdot x = e$, cu unica soluție $x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha$.

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ o ordonare oarecare a factorilor.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$.

2. a) $z = \sqrt{2}(1+i)$.

b) Dacă $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil, atunci $a^2 + b^2 = 1$, deci $a = \pm 1$ şi $b = 0$ sau $a = 0$ şi $b = \pm 1$. Rezultă că $z \in \{\pm 1; \pm i\}$. Cum ± 1 şi $\pm i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$, rezultă concluzia.

c) $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ aparține lui $H \Leftrightarrow 2 / (a+b)$. Dacă $a + bi$, $c + di \in H$ rezultă $(a+bi)(c+di) \in H$ deoarece $2 / c(a+b) + d(a-b)$.