

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Deoarece $\alpha^3 = e$ rezultă că $\alpha^{2009} = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația devine $\alpha^2 \cdot x = e$, cu unica soluție

$$x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha.$$

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ o ordonare oarecare a factorilor.

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1) + m(\sigma_2) + m(\sigma_3) + m(\sigma_4) + m(\sigma_5) + m(\sigma_6)} = -1.$$

2. a) $z = \sqrt{2}(1+i)$.

b) Dacă $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil, atunci $a^2 + b^2 = 1$, deci $a = \pm 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = \pm 1$.

Rezultă că $z \in \{\pm 1; \pm i\}$. Cum ± 1 și $\pm i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$, rezultă concluzia.

c) $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ aparține lui $H \Leftrightarrow 2 \mid (a+b)$. Dacă $a + bi, c + di \in H$ rezultă $(a + bi)(c + di) \in H$ deoarece $2 \mid c(a+b) + d(a-b)$.